Serie 6

1. Zwei Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Wir modellieren dies mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2.$$

Seien X und Y Zufallsvariablen definiert durch $X(\omega) = \omega_1$ und $Y(\omega) = \omega_2$ (X und Y repräsentieren jeweils den Wert des ersten und zweiten Würfels). Betrachten Sie die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{X \in 2\mathbb{Z}\}, \\ B &= \{1 + Y \in 2\mathbb{Z}\}, \\ C &= \{X + Y \leq 3\}, \\ D &= \{X \leq 2, Y \leq 2\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) A und B sind unabhängig,

b) A und C sind **nicht** unabhängig,

c) A und D sind unabhängig,

d) A, B, D sind paarweise unabhängig. Sind sie unabhängig?

2. Wir betrachten den Wurf eines fairen Tetraeders, markiert mit den Zahlen 1 bis 4. Wir modellieren dies wiederum mit einem Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\},$$

wobei jedes $\omega \in \Omega$ gleichwahrscheinlich ist.

Zeigen Sie, dass die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\}, \\ B &= \{1, 3\}, \\ C &= \{1, 4\}. \end{aligned}$$

paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

Bitte wenden!

3. Seien A, B und $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ Ereignisse in einer σ-Algebra $\mathcal{F}$. Nehme an, dass die A_i paarweise disjunkt sind.

a) Zeige, dass A und B unabhängig sind genau dann, wenn A^c und B^c unabhängig sind.

b) Zeige, falls für alle $i = 1, \dots, n$, A and A_i paarweise unabhängig sind, dass dann A und $\bigcup_{i=1}^n A_i$ unabhängig sind.

c) Nehme an, dass $P(A) = 1$ ist. Zeige, dass für alle $B \in \mathcal{F}$, A and B unabhängig sind.

4. Wir betrachten ein Kartenblatt mit den üblichen 52 Karten und 4 Farben (Herz, Kreuz, Karo und Pik). Sind die folgenden Ereignisse unabängig?

a) Wir ziehen eine Karte und betrachten die Ereignisse $A =$ < Du hast einen König gezogen > und $B =$ < Du hast eine Pik-Karte gezogen >.

b) Wir ziehen zwei Karten **mit Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ < Du ziehst ein Paar > und $B =$ < Du hast zwei Herzkarten gezogen >. Nehme an, dass die Reihenfolge der Verteilten Karten eine Rolle spielt.

c) Wir ziehen zwei Karten **ohne Zurücklegen** und betrachten die Ereignisse $A =$ < Du ziehst ein Paar > und $B =$ < Du ziehst zwei Kreuz-Karten >. Nehme an, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

5. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $A \in \mathcal{F}$. Betrachten Sie die **Indikatorfunktion** $\mathbb{1}_A$ von A, definiert durch

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega \notin A, \\ 1 & \text{if } \omega \in A. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_A$ eine Zufallsvariable ist.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $\mathbb{1}_A$

c) Sei $B \in \mathcal{F}$ ein anderes Ereignis. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. A und B sind unabhängig,
2. Die Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängig.